Lineare Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine Gerade. Zwei Graphen können entweder **parallel** zueinander verlaufen oder sich **schneiden**. Sie haben dann einen gemeinsamen **Schnittpunkt**.

spiele

1 Funktionsgleichung einer linearen Funktion

Bei einem Fahrradverleih zahlt man einen **Grundbetrag** von 1,50 €. Für **jede Stunde** (x), die man das Rad benutzt, werden 2 € fällig. Tina möchte sich eines der Räder ausleihen und überlegt, wie sie die Kosten (y) am geschicktesten berechnen könnte. Sie kommt auf folgende Gleichung:
$y=2\cdot x+1{,}50$

- Eine Zuordnung, bei der jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird, heißt **Funktion**. Funktionen können durch **Wertetabellen, Gleichungen** und **Funktionsgraphen** dargestellt werden.
- **Lineare Funktionen** sind besondere Funktionen, die sich als Gleichung der Form **y = mx + t** bzw. **f(x) = mx + t** darstellen lassen. Für m und t können beliebige, aber feste Werte eingesetzt werden.
- Zeichnet man die Wertepaare einer linearen Funktion als **Graph** in ein Koordinatensystem ein, liegen alle Punkte auf einer **Geraden**.

1. Erstelle eine Wertetabelle für die Funktionsgleichung $y=2\cdot x+1{,}5$ und zeichne den dazugehörigen Graphen.

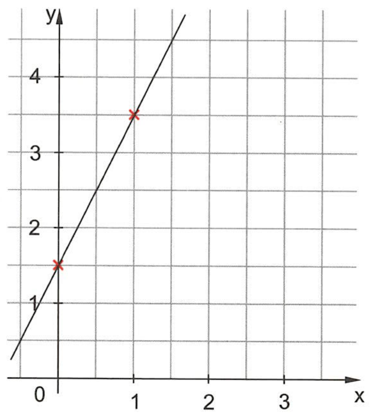
Lösung:

▶ **Wertetabelle:**

x	0	1	2	3
y	1,5	3,5	5,5	7,5

Setze in die Funktionsgleichung verschiedene **Werte für x** ein und **berechne y**.

▶ **Schaubild/Graph:**



Zeichne die **Wertepaare** in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie zu einer **Geraden**.

2. Überprüfe, ob der Punkt P(–2 | –4) auf der Geraden mit der Funktionsgleichung $y=0{,}5x-3$ liegt.

Lösung:
$-4=0{,}5\cdot(-2)-3$
$-4=-4$ (wahr)

Der Punkt P liegt auf der Geraden.

Setze den **x-Wert –2** und den **y-Wert –4** des Punktes P in die Funktionsgleichung ein. Überprüfe, ob eine **wahre** Aussage entsteht.

110 Lege für folgende lineare Funktionen jeweils eine Wertetabelle an und zeichne die Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

a) $y=0{,}5x-2$
b) $y=-1{,}5x+4$
c) $y=\frac{1}{4}x+5$
d) $y=-x+7$

111 Welcher Punkt liegt auf der Geraden $y=4x-5$? Kreuze an.

☐ A(–3,5 | –17)
☐ B(2,5 | –5)
☐ C(1 | –1,5)
☐ D(2 | 3)

112 Ergänze die Punkte so, dass sie auf der Geraden mit der Funktionsgleichung $y=-1{,}5x+0{,}5$ liegen.

a) P(0 |)
b) Q(7 |)
c) R(| 0)
d) S(| –1,5)

113 Ein Lkw wiegt ohne Ladung 3,5 t. Er wird mit Sand beladen, 1 m^3 wiegt 1,2 t.

a) Wie schwer ist der Lkw mit Ladung, wenn 4 m^3 Sand geladen werden?
b) Wie kann man die Gesamtmasse für 1 m^3, 2 m^3 … Sand am geschicktesten berechnen? Stelle eine Funktionsgleichung auf.

114 In einen Wasserbehälter, der 800 ℓ fasst und in dem sich bereits 300 ℓ befinden, laufen pro Stunde 50 ℓ Wasser ein.

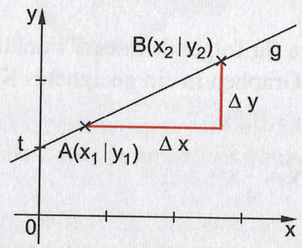
a) Wie lautet die Funktionsgleichung, die den geschilderten Sachverhalt darstellt?
b) Erstelle eine Wertetabelle.
c) Zeichne das Schaubild.
d) Lies aus dem Schaubild ab, nach wie vielen Stunden der Tank voll ist.

2 Steigung, Achsenabschnitt und Nullstelle

Wie der Graph einer linearen Funktion **verläuft**, kann man schnell aus seiner Funktionsgleichung ablesen.

Eine lineare Funktion $y = mx + t$ ist durch die Werte m und t **eindeutig** bestimmt.

- **m** ist die **Steigung** der Funktion. Es gilt:
  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Für **m > 0 steigt** der Graph der Funktion von links unten nach rechts oben.
  Für **m = 0** ist der Graph der Funktion eine **Parallele** zur x-Achse.
  Für **m < 0 fällt** der Graph der Funktion von links oben nach rechts unten.



- **t** heißt **y-Achsenabschnitt** der Funktion und gibt an, wo die Funktion die **y-Achse** schneidet. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten (0 | t).
- Den **Schnittpunkt** der Funktion mit der **x-Achse** erhält man, wenn man für y den Wert 0 einsetzt. Die x-Koordinate des Punktes heißt **Nullstelle.**

spiele

1. Gib die Steigung der Funktion $y = 2x + 2{,}5$ an und bestimme die Schnittpunkte mit den Achsen.

Lösung:

$m = 2,\ t = 2{,}5$ — Lies **m** und **t** aus der Funktionsgleichung ab.

$2x + 2{,}5 = 0 \quad | -2{,}5$

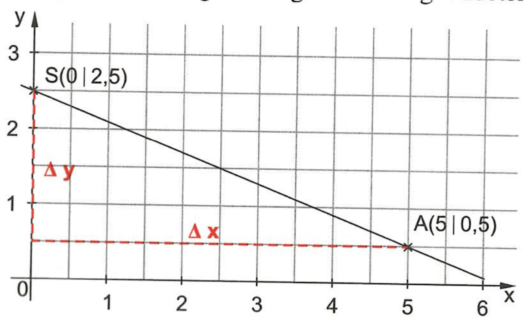
$2x = -2{,}5 \quad | :2$

$x = -1{,}25$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse (die Nullstelle) hat den **y-Wert 0**.

Die Funktion hat die Steigung 2 und schneidet die y-Achse in S(0 | 2,5) und die x-Achse in N(–1,25 | 0).

2. Gib die Funktionsgleichung zu dem abgebildeten Graphen an.



Lösung:

$t = 2{,}5$ — Die Funktion schneidet die y-Achse in **S(0 | 2,5)**.

$m = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{5} = -0{,}4$ — Der Graph **fällt**, daher muss m **negativ** sein.

$\Rightarrow\ y = -0{,}4x + 2{,}5.$ — Gib die vollständige Gleichung an.

3. Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die durch $t = 0{,}5$ und P(4 | 1) gegeben ist.

Lösung:

$1 = m \cdot 4 + 0{,}5 \quad | -0{,}5$

$0{,}5 = 4m \quad | :4$

$m = 0{,}125$

Setze **t = 0,5** und den x- und y-Wert des Punktes **P(4 | 1)** in die Gleichung einer allgemeinen linearen Funktion $y = mx + t$ ein und löse nach m auf.

$\Rightarrow\ y = 0{,}125x + 0{,}5$ — Gib die vollständige Gleichung an.

4. Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die durch die Punkte P(–1 | 2) und Q(1 | 0) geht.

Lösung:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{1-(-1)} = \frac{-2}{2} = -1$ — Berechne zunächst die Steigung m, indem du die Koordinaten der beiden Punkte in die **Steigungsformel** einsetzt.

$0 = -1 \cdot 1 + t$

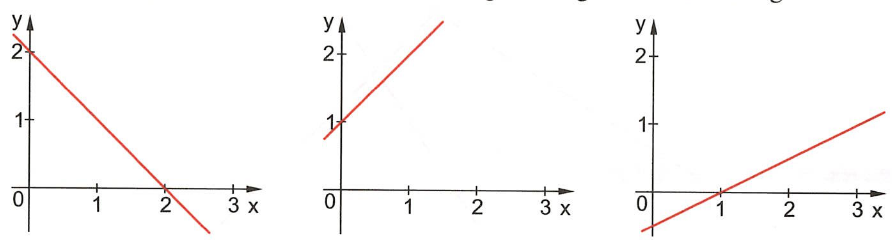
$0 = -1 + t \quad | +1$

$t = 1$

Setze **m = –1** und einen der Punkte (hier **Q**) in die Gleichung einer allgemeinen linearen Funktion $y = mx + t$ ein und löse nach t auf.

$\Rightarrow\ y = -x + 1$ — Gib die vollständige Gleichung an.

115 Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsgleichung? Verbinde richtig.



$y = x + 1$ — $y = 0{,}5x - 0{,}5$ — $y = -x + 2$

116 Bestimme bei folgenden Funktionen jeweils die Steigung und den y-Achsenabschnitt. Handelt es sich um einen steigenden oder um einen fallenden Graphen?

a) $y=4x+1$ b) $y=-x+2{,}5$

c) $y=-\frac{1}{3}x$ d) $y=5$

117 Stelle die Funktionsgleichung einer linearen Funktion auf, deren Graph die y-Achse bei 4 schneidet und die Steigung 0,5 hat und zeichne den Graphen.

118 Zeichne die Graphen folgender Funktionen, ohne eine Wertetabelle anzulegen.

a) $y=\frac{1}{2}x-2$ b) $y=-x$

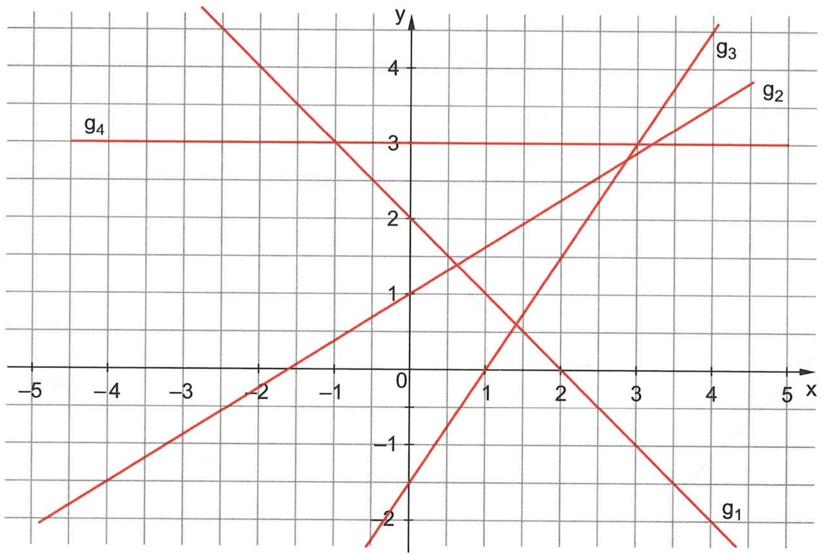
c) $y=-5x+3$ d) $y=3x-1{,}5$

119 Gib die Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit den Achsen an.

a) $y=x-1$ b) $y=-4x+0{,}5$

c) $y=\frac{1}{4}x+5$ d) $y=\frac{2}{3}x-2$

120 Gib zu jeder der dargestellten Funktionen die Funktionsgleichung und die Koordinaten der Nullstelle an.



✱ 121 Spiegle die Graphen der Funktionen an der y-Achse und bestimme die Funktionsgleichungen der gespiegelten Graphen. Erkennst du eine Gesetzmäßigkeit?

a) $y=x+1$ b) $y=2x+3$

c) $y=-\frac{1}{2}x-1$ d) $y=-3x$

122 Bringe die Funktionsgleichungen jeweils in die Form $y=mx+t$ und bestimme die Nullstellen.

a) $5=-y-2{,}5x$ b) $\frac{1}{4}x+5-y=0$

c) $3y-1{,}5x=3$ d) $-x=-\frac{1}{2}y+2$

123 Jeder der Punkte liegt auf mindestens einem Graphen der angegebenen Funktionen. Ordne richtig zu.

P(0|0,5)
Q(1|1)
R(2|0)
S(–0,5|–0,5)

Was bedeutet es, wenn ein Punkt auf zwei Graphen liegt?

$y=0{,}5x+0{,}5$

$y=\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$

$y=2x-1$

$y=-4x-2{,}5$

$y=-x+2$

124 Bestimme aus den Angaben jeweils die Gleichung einer linearen Funktion, die durch den angegebenen Punkt geht.

a) $t=4$; A(3|7) b) $m=-3$; B(–2|–4)

c) $t=-2$; C(5|8) d) $m=\frac{1}{4}$; D(1|0)

125 Bestimme jeweils die Funktionsgleichung der Geraden, die durch die folgenden Punkte geht.

a) A(2|5); B(–1|2) b) C(1|–1); D(–9|9)

c) E(–5|2,5); F(5|0,5) d) G(2|–3); H(–1|3)

✱ 126 Zeichne in ein Koordinatensystem das Viereck A(0|1), B(5|3), C(3|4), D(–2|4). Gib die Gleichungen der Funktionen an, deren Graphen das Viereck bilden.

Tipp
Verlängere die Seiten jeweils über die Eckpunkte hinaus.

127 Finde Gleichungen für drei Funktionen, deren Graphen ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Zeichne das Dreieck zunächst und berechne anschließend seinen Flächeninhalt.

3 Schnittpunkt zweier linearer Funktionen

Die Graphen zweier linearer Funktionen können **parallel** zueinander verlaufen oder sich **schneiden**.

- Zwei zueinander **parallele** Graphen g_1 und g_2 haben die **gleiche Steigung m**.
- Sind die Geraden zweier linearer Funktionen nicht parallel zueinander, haben sie einen gemeinsamen **Schnittpunkt**. Der Schnittpunkt kann **zeichnerisch** oder **rechnerisch** bestimmt werden. Für eine rechnerische Lösung müssen die Funktionsgleichungen **gleichgesetzt** werden.
- Stehen die Geraden g_1 und g_2 **senkrecht** aufeinander, gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Beispiele

1. Bestimme den Schnittpunkt der Graphen zu den Funktionsgleichungen $y = x + 1$ und $y = -\frac{1}{2}x + 2,5$ rechnerisch und zeichnerisch.

Lösung:

▶ **Rechnerisch:**

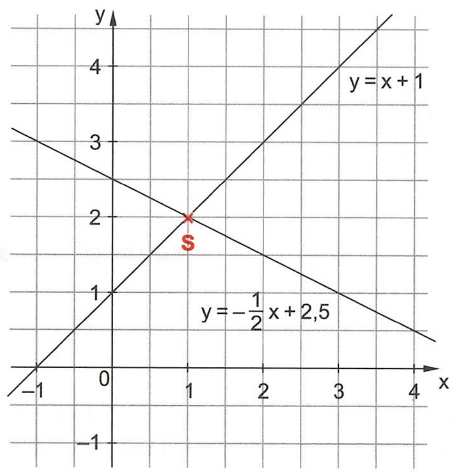
$$x + 1 = -\frac{1}{2}x + 2,5 \quad \left| +\frac{1}{2}x - 1\right.$$
$$1,5x = 1,5 \quad |:1,5$$
$$x = 1$$

Die beiden y-Werte müssen gleich sein, **setze** also die beiden Funktionsgleichungen **gleich** und löse nach x auf.

$$y = 1 + 1$$
$$y = 2$$
$$\Rightarrow \quad S(1\,|\,2)$$

Setze **x = 1** in eine der beiden Funktionsgleichungen ein (hier: y = x + 1) und du erhältst y.

▶ **Zeichnerisch:**



2. Gib die Funktionsgleichung einer zu $y = 2x + 4$ parallelen Geraden an.

Lösung:

$y = 2x - 5$

Die **Steigungen** der beiden Geraden müssen gleich sein. Jede Funktionsgleichung, bei der **m = 2** ist, ist eine richtige Lösung.

3. Gib die Funktionsgleichung der Geraden an, die auf $y = 2x + 1$ senkrecht steht und die y-Achse bei 5 schneidet.

Lösung:

$$2 \cdot m_2 = -1 \quad |:2$$
$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

Es muss gelten: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

$$\Rightarrow \quad y_2 = -\frac{1}{2}x + 5$$

Da die y-Achse bei 5 geschnitten wird, ist **t = 5**.

128 Bestimme die Schnittpunkte folgender Geraden zeichnerisch und rechnerisch.

a) $y = 2x - 5$ $\quad$ $y = -x + 4$

b) $y = 1,5x + 4$ $\quad$ $y = -x - 8$

c) $2y - x = -3$ $\quad$ $x + 2y = 7$

129 Gib die Funktionsgleichung einer Geraden an, die zu $y = 3x - 4$ parallel verläuft.

130 Welche Funktionsgleichung hat eine Gerade, die parallel zu $y = -2x - 4$ verläuft und die y-Achse bei $P(0\,|\,1)$ schneidet?

131 Die Gerade g_1 wird durch die Punkte $P(-1\,|\,7)$ und $Q(3\,|\,-1)$ bestimmt.

a) Ermittle rechnerisch die Funktionsgleichung von g_1.

b) In welchem Punkt schneidet g_1 die x-Achse, in welchem Punkt die y-Achse?

c) Eine zweite Gerade g_2 steht senkrecht auf g_1 und geht durch den Punkt $R(1,5\,|\,4,5)$. Gib die Funktionsgleichung an.

d) Bestimme den Schnittpunkt S der beiden Geraden.

✱ 132 Zeichne in ein Koordinatensystem das Dreieck mit den Eckpunkten $A(1\,|\,1)$, $B(5\,|\,2)$ und $C(3\,|\,4)$ ein.

a) Die Graphen welcher Funktionen bilden dieses Dreieck?

b) Welche Koordinaten müsste C haben, damit das Dreieck rechtwinklig ist? Berechne.

Tipp

Wenn AC senkrecht auf BC steht, ist das Dreieck rechtwinklig.